Popularnonaukowe streszczenie projektu

Wiele układów otaczającego nas świata można scharakteryzować przy pomocy skończonej liczby wielkości $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ opisujących jednoznacznie ich stan. Modele rzeczywistego świata skonstruowane na podstawie obserwacji lub w ramach teorii mówią nam jak szybko układ zmienia się będąc w stanie $\boldsymbol{x}$, co w notacji matematycznej przyjmuje postać układu równań różniczkowych $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$. Zachowanie w czasie rzeczywistego układu opisywane ewolucją czasową jego stanu $\boldsymbol{x}(t)$ jest dane w niejawny sposób równaniami różniczkowymi.

Dla danego modelu fundamentalnym problemem jest znalezienie rozwiązania ogólnego odpowiadającego mu układu równań różniczkowych tzn. znalezienie jawnej zależności $\boldsymbol{x}(t)$. Jeśli możemy to zrobić, to wówczas układ równań różniczkowych jest rozwiązalny i jesteśmy w stanie przewidzieć zachowanie w czasie rzeczywistego układu. Jest to ważny problem również dla zastosowań. Możemy sobie wyobrazić, że po wystrzeleniu sztucznego satelity jesteśmy żywotnie zainteresowani śledzeniem jego ruchu.

Chociaż teoria równań różniczkowych zwyczajnych jest dobrze rozwinięta, to dla większości równań różniczkowych wywodzących się z różnych działów nauk ścisłych i przyrodniczych nie ma szansy na znalezienie ich rozwiązań w jawnej postaci. Na szczęście istnieje podejście, które umożliwia uzyskanie ścisłych informacji o zachowaniu w czasie naszego układu, a czasami nawet znalezienie jego rozwiazań w niejawnej postaci. W tym celu wykorzystuje się znajomość pewnych funkcji $F(\boldsymbol{x})$, zależnych od stanu układu $\boldsymbol{x}$, które nie zmieniają się w trakcie ewolucji czasowej układu, tzn. $F(\boldsymbol{x}(t)) = F(\boldsymbol{x}(0))$ dla dowolnego t. Nazywamy je całkami pierwszymi. Jeśli znajdziemy dostateczną ilość niezależnych całek pierwszych, to układ jest całkowalny i możemy znaleźć jego rozwiązanie. Z drugiej strony brak całek pierwszych oznacza złożone lub chaotyczne zachowanie naszego układu. Jeśli znamy tylko kilka całek (mniej niż ilość potrzebna do całkowalności) możemy zredukować wymiar układu, co oznacza zmniejszenie liczby wielkości potrzebnych do opisu stanu układu.

Dla większości układów pochodzenia fizycznego najlepiej znanymi przykładami całek pierwszych są: energia, pęd i moment pędu, które są bezpośrednio związane z prawami zachowania pewnych wielkości fizycznych. Jednak dla wielu układów istnieją całki pierwsze, które nie mają takiej bezpośredniej interpretacji fizycznej i powstaje problem jak ich szukać. Pierwsze wyniki dotyczące obecności całek pierwszych i całkowalności można znaleźć już w słynnych *Principiach* Newtona. Od tych czasów zaczęło się poszukiwanie całek pierwszych, a nowe przypadki całkowalne ważnych układów fizycznych były traktowane jak wielkie osiągnięcia matematyki i fizyki. Przypomnijmy chociażby wysoce nietrywialny przypadek Kovalevskiej w dynamice bryły sztywnej nagrodzony nagrodą Bordina Francuskiej Akademii Nauk. Układy całkowalne są rzadkie ale bardzo ważne, ponieważ dają nam pełną informację o układach fizycznych i większość naszej wiedzy o układach realnego świata pochodzi właśnie od nich. Przywołajmy chociażby całkowalny i rozwiązalny oscylator harmoniczny wykorzystywany jako model różnorodnych układów fizycznych.

Metoda bezpośrednia szukania całek opiera się na bardzo prostej idei. Zakładamy że domniemana całka pierwsza ma określoną postać np. jest wielomianem w pewnych zmiennych o nieznanych współczynnikach. Z faktu, że całka nie zmienia się w trakcie ewolucji układu, można otrzymać warunki na te nieokreślone współczynniki. Przyjmują one postać innego układu równań rożniczkowych i w wielu przypadkach jest on łatwiejszy do rozwiązania niż oryginalny system. Ta metoda jest bardzo stara i współcześnie pojawiły się inne metody szukania całek pierwszych. Ale ma ona pewną przewagę w porównaniu z tymi nowoczesnymi metodami. Mianowicie nie są potrzebne do jej zastosowania żadne inne dane oprócz samego układu równań różniczkowych. Głównym celem projektu jest opracowanie nowych metod teoretycznych i algorytmów ulepszających metodę bezpośrednią.

Drugim ważnym celem projektu jest sprawdzenie skuteczności opracowanych narzędzi w zastosowaniu do systematycznych poszukiwań nowych przypadków całkowalnych w pewnych klasach układów równań różniczkowych. Klasy równań wybrano z jednej stron tak aby stanowiły klasy interesujących układów fizycznych: układy hamiltonowskie z dwoma stopniami swobody w przestrzeniach zakrzywionych i układy hamiltonowskie z potencjałami algebraicznymi. Z drugiej strony właśnie dla tych klas układów autorzy projektu uzyskali niedawno bardzo sile warunki konieczne całkowalności. Układy spełniające warunki konieczne są najlepszymi kandydatami na układy całkowalne ale do potwierdzenia tej własności potrzebne są jawne postacie całek pierwszych. Tego dotyczy trzecie zadanie projektu.

Wierzymy, że opracowane metody i algorytmy oraz znalezione nowe całkowalne przypadki będą interesujące zarówno dla specjalistów z teorii układów dynamicznych jak i naukowców z różnych działów nauk ścisłych i przyrodniczych wykorzystujących w swoich badaniach układy równań różniczkowych.